

Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fausse = 0pt

	Questions	Réponses	Notes
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$	$\lim_n u_n = 1$	
Q2 2pt	Déterminer, dans $[0, 2\pi]^2$ , l'ensemble $S$ des solutions du système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{42}$	$z = 1$	
Q4 2pt	Déterminer, $\Gamma$ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient: $(iz+1)(z+i-1) \in \mathbb{R}$	$\Gamma$ est ... $y = \dots = \frac{1}{1-2x}$	
Q5 2pt	Soit $a \in ]0, \pi[$ . Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D = \frac{\sin a}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n = 1 - \frac{1}{(n+4)!}$	
Q7 2pt	Calculer $l = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + E\left(\frac{1}{ x }\right)\right)$	$l = \frac{1}{2}$	
Q8 2pt	Évaluer la limite $j = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$	$j = \frac{1}{12}$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x^2 + y) = x^3 f(x) + f(y)$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit $g$ la fonction définie par $\forall x \in ]0, \pi[ \quad g(x) =  \cos x  \sqrt{1 - \cos x}$ Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$ , $\forall x \in ]0, \pi[ \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \ln e^x - e^{2x} $ Déterminer $h^{-1}$ .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots, \dots$ $h^{-1}(x) = \dots$	
Q12 2pt	Calculer $K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2} dx$	$K =$	
Q13 2pt	calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$	$L = \frac{\pi}{4}$	
Q14 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) =  K_1 \cos 3x + K_2 \sin 3x  e^{-x} + \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{36} \cos 3x$	
Q15 2pt	Résoudre, dans $\mathbb{N}^2$ , l'équation $x^2 - y^2 = 404$	$S = (54, 50); (102, 100); (203, 201)$	

II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de  $m$  la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2m \\ 1 & -m+1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$  est inversible:

- A  -1 et un nombre négatif    B  uniquement -1    C  -1 et un nombre positif    D  -1 et  $\frac{1}{2}$

Q17: Sur  $[0, +\infty[$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x| + \ln(x+1)$  est:

- A  toujours positive    B  positive puis négative puis positive    C  négative puis positive    D  aucunes des trois réponses

Q18: Soit  $f$  définie par  $f(0) = \frac{1}{e}$ ,  $f(e) = 0$  et  $f(x) = e^{\frac{1+\ln x}{x-\ln x}}$ . Alors sa courbe  $C_f$  admet:

- A  une asymptote oblique en  $+\infty$     B  en  $x = e$  une demi tangente à gauche    C  en  $x = e$  une demi tangente à droite verticale    D  aucunes des trois réponses

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- A   $\frac{1}{6006}$     B   $\frac{10}{1001}$     C   $\frac{50}{14^5}$     D  aucunes des trois réponses

Q20: Une boîte  $B_1$  contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte  $B_2$  contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte  $B_3$  contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton  $a$  de  $B_1$ , un jeton  $b$  de  $B_2$ , un jeton  $c$  de  $B_3$ . Quelle est la probabilité pour que l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet des racines réelles?

- A  0,5    B  0,25    C  0,75    D  1

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points  $A(-1,1,1)$  et  $B(7,-5,5)$ . Soit  $S$  la sphère dont l'un des diamètre est le segment  $[AB]$ . Le plan tangent à  $S$  au point  $C(1,1-1)$  est:

- A   $2x - 3y + 4z + 5 = 0$     B   $4x + 3y + 2z - 5 = 0$     C   $2x + 2y - z - 5 = 0$     D   $4x + 2y + 2z - 5 = 0$

Q22: Soit  $(u_n)_n$  la suite de terme général  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ . Alors

- A   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = +\infty$     B   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$     C   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1$     D  aucunes des trois réponses

Q23: Soit  $E$  l'espace vectoriel défini par:  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$ . Quelle est la dimension de  $E$  ?

- A  1    B  2    C  3    D  aucunes des trois réponses

Q24: Combien l'équation  $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$  possède-t-elle de solutions dans  $[0, \frac{2\pi}{3}]$  ?

- A  Cinq solutions    B  Six solutions    C  Sept solutions    D  Plus que sept solutions

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$$

- A  0    B  1    C   $+\infty$     D  cette limite n'existe pas

Notes