Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

# CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filières : Sciences Mathématiques A et B

## Epreuve de Mathématiques

27/07/10 - Durée : 2h 37mn

**N.B.** * La rédaction peut être en français ou en arabe
* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

**Toutes les réponses doivent figurer sur les feuilles de l'épreuve**

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, démontrer que $(\forall k \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 5k) \Longrightarrow (\forall l \in \mathbb{Z}, n \neq 5l)$. **(3Pts)**

2. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq x \; \forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $E(.)$ est la partie entière **(3Pts)**

3. Soit $n \in I\!N^*$, montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair. **(3Pts)**

4. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si $z \in I\!R$. **(3Pts)**

5. Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est un irrationnel. **(3Pts)**

6. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. **(3Pts)**

7. On considère trois ensembles $A$, $B$ et $C$. Montrer que **(3Pts)**

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Longrightarrow B \subset C$$

8. Soit $f$ une fonction strictement monotone, dérivable et à dérivée continue sur $[a, b]$. Montrer que **(3Pts)**

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\, dx$$

## Questions à réponse précise, Partie I

| Répondre dans la colonne réponse | |
|---|---|
| **Question** | **Réponse** |
| Définir à l'aide d'une valeur absolue les encadrements suivants : $x \in [-3, 5]$ et $x \in [2, 7]$ **(2Pts)** | |
| On considère la fonction $f(x) = \min(x^2, 3)$, donner $f(\mathbb{R})$, $f([-1, 1])$ et $f^{-1}([-1, 4])$ **(3Pts)** | |
| Soit $x \in [-2, 1]$ et $y \in [2,3]$, donner des encadrements des quantités suivantes : $x - y$ , $-2x + y$ et $xy$ **(3Pts)** | |
| Déterminer la valeur de $A = E(x) + E(-x)$ avec $E(.)$ est la partie entière **(2Pts)** | |
| A l'aide des quantificateurs, écrire les propositions suivantes et préciser celles qui sont vraies:<br>(a) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres. **(2Pts)**<br>(b) Il existe un entier multiple de tous les autres. **(2Pts)**<br>(c) Certains réels sont supérieurs à leurs carrés. **(2Pts)** | |
| Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?<br>(a) $(\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0) \Longrightarrow (\sqrt{x^2} = -x)$. **(1Pt)**<br>(b) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*\ z = xy$. **(1Pt)**<br>(c) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\dfrac{+nx}{\ln(nx)} \in \mathbb{R}$. **(1Pt)** | |
| $f(x) = \dfrac{x}{1 + \lvert x \rvert}$ avec $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Déterminer $f^{-1}$. **(2Pts)** | |

## Questions à réponse précise, Partie II

| Répondre dans la colonne réponse | |
|---|---|
| **Question** | **Réponse** |
| Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout réel $x \neq -1$, on a $\dfrac{x^2}{x+1} = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ **(2Pts)** | |
| Calculer la dérivée de **(2Pts)** $$g(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{\exp(2x)+1}{\exp(2x)+3}\right)\right)$$ | |
| On considère la fonction $f$ définie par $$f(x) = -x+7+6\ln(2x+1)-6\ln(2x+2).$$ sur $\left]\frac{-1}{2},\ +\infty\right[$, étudier la position de la courbe $(C_f)$ de $f$ par rapport à la droite $(\Delta)$ d'équation $y=-x+7$ **(1Pt)** | |
| Soit $f : [0,\ 1] \longrightarrow I\!R$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$. On définit $g$ sur $[0,\ 1]$ par $$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$ Quelles hypothèses faut-il rajouter pour que $g$ soit dérivable sur $[0,\ 1]$ ? **(2Pts)** | |
| Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx.$ **(2Pts)** | |
| Résoudre dans $I\!R$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$. **(2Pts)** | |
| Soit $p$ et $q$ deux réels non nuls, on considère l'équation $x^2+px+q=0$ (*). Trouver les valeurs de $p$ et $q$ pour lesquelles $p$ et $q$ sont solutions de l'équation (*). **(2Pts)** | |
| Eliminer 13 chiffres sur 21 de telle sorte que la somme des 8 chiffres restant soit égale à 41<br>3 3 3 3 3 3 3<br>4 4 4 4 4 4 4<br>8 8 8 8 8 8 8<br>**(2Pts)** | |